Funciones de varias variables

Aplicaciones matemáticas para economía y negocios (EAF2010)

Felipe Del Canto

Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer semestre de 2021

Motivación: Modelo de demanda

- En Intro a la Micro, la demanda dependía sólo del precio:

$$Q(p) = -3p + 1$$

- Consumo de leche de almendra depende negativamente del precio.

- Pero también depende de otras cosas...

Motivación: Modelo de demanda

- La solución era dejar el precio "quieto" y mirar cambios en otros factores.
  - Ingreso, precio de otros bienes, preferencias, etc.

- Pero a veces nos interesa la interacción **en conjunto** de todos los factores.

¡Una variable no es suficiente para un análisis más detallado!

Funciones, dominio y recorrido

- Pensaremos en general en n variables.
  - Es decir, en puntos (o vectores) en $\mathbb{R}^n$.
  - $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definición (Función de n variables)

Una función f de n variables y con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ (D subconjunto de $\mathbb{R}^n$) es una regla que asigna un número (real) $f(\mathbf{x})$ a cada uno de los vectores $\mathbf{x}$ en D. Esto se puede resumir:

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

y leemos "f es una función de n variables con dominio D y que toma valores en $\mathbb{R}$".

Ejemplo (Funciones de varias variables)

- Costo de producir leche y crema de coco:

$$C(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2 + 4x_1x_2$$

- $f(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.

- Ventas dadas por precio (p) y gasto en publicidad (A):

$$f(p, A) = 1000(5 - pe^{-kA})$$

- $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}}{x_1 + x_3}$.

- Cuando $n = 2$ (solo hay 2 variables), decimos que la función es **bivariada**.
  - En el caso general decimos que es **multivariada** o **multivariable**.

- Cuando es claro que $D \subset \mathbb{R}^n$ podemos simplificar la notación y escribir:

$$f : D \to \mathbb{R}$$

Dominio

A menos que digamos lo contrario, asumimos que el dominio de una función es el conjunto más grande de puntos para los cuales se puede aplicar la regla.

Ejercicio: Encuentre el dominio de las funciones anteriores.

- Costo de producir leche y crema de coco:

$$C(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2 + 4x_1x_2$$

- $f(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.
- Ventas dadas por precio (p) y gasto en publicidad (A):

$$f(p, A) = 1000(5 - pe^{-kA})$$

- $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}}{x_1 + x_3}$.

Definición (Rango)

El rango o recorrido de una función f es el conjunto de todos los valores que toma la función cuando se reemplazan todos los posibles puntos de su dominio. Formalmente se escribe:

$$\text{Rango} = \{f(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \in D\}$$

- **¡Cuidado!** Encontrar el rango puede ser engorroso.
- Si el rango es un conjunto I, podemos escribir:

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to I$$

Continuidad

- Para una función de una variable f, la continuidad era, a grandes rasgos:

  Cambios pequeños de x se traducen en cambios pequeños de $f(x)$.

- Para funciones multivariadas la idea es la misma.

- No veremos la definición formal pero sí un resultado útil como regla de pulgar.

Teorema (Continuidad de funciones multivariadas)

Si una función multivariada se construye como suma, resta, multiplicación, división y/o composición de funciones continuas, entonces es continua donde esté bien definida.

- Esas "funciones continuas" pueden ser univariadas.
- Recordar que composición es poner una función dentro de otra.
  - $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$ es la composición de $\sqrt{x}$ y $\ln(x)$.

Ejemplo (Continuidad)

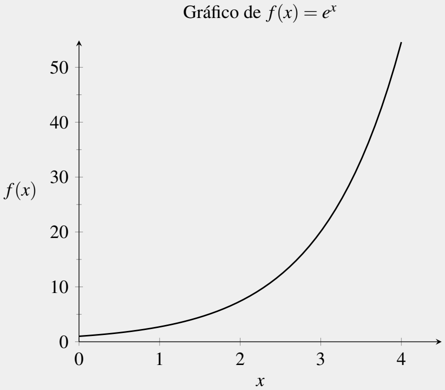
- La función
$$f(x,y,z) = x^3z - 3y^2z^3 - xyz + z^2$$
es continua en todo $\mathbb{R}^3$.

- La función
$$g(x,y) = \frac{x^2+y^2-4}{x-y}$$
es continua en los puntos donde $x \neq y$, para que el denominador no sea 0.

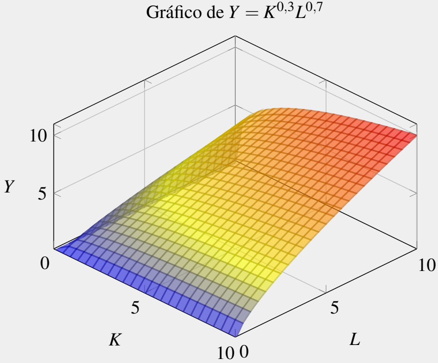
Gráficos y curvas de nivel

Gráficos

- En funciones de una variable bastaba con un gráfico con 2 ejes.
  - Uno para x y uno para $f(x)$



- En funciones bivariadas, vamos a necesitar 3 ejes.
    - Uno para x_1, uno para x_2 y uno para $f(x)$.



Gráficos

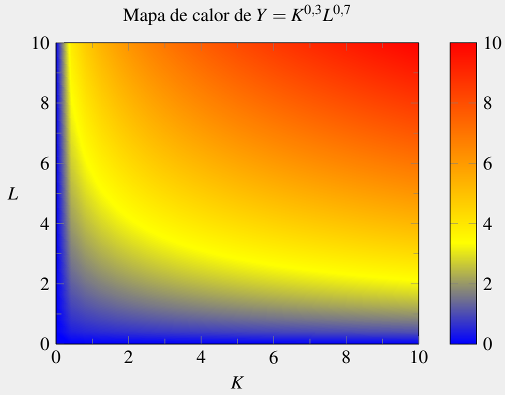
- En general en funciones de n variables necesitamos $n+1$ ejes.
  - Pero para poder dibujar (¡e imaginar!) no podemos usar más de 2 variables.

- Luego, en el curso usaremos muchas funciones bivariadas.

- **¡IMPORTANTE!** Nunca olviden que en general pensamos en n variables.

GRÁFICOS PARA FUNCIONES BIVARIADAS

- Hay otras formas de graficar funciones bivariadas, usando solo dos ejes.
  - Para mostrar la altura usamos colores.
  - Estos gráficos se conocen como **mapas de calor**.



CURVAS DE NIVEL

- Hay otras formas de tener una idea, en 2D, de una función bivariada.

- Viendo qué puntos del dominio hacen que la función esté a la misma altura.
  - Y dibujándolos en el plano XY.

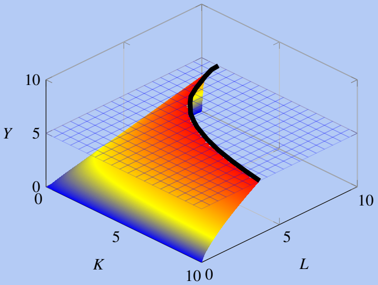
- Estos puntos se conocen como **curvas de nivel**.

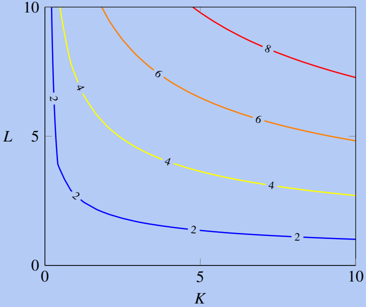
Definición (Curva de nivel)

La curva de nivel de f a altura c es el conjunto de puntos del dominio D para los cuales $f(\mathbf{x}) = c$.

- Se llaman “curvas” porque en general estos puntos forman una curva.
  - Pero esto no ocurre siempre, ¡no se dejen engañar!.
- Las podemos ver “cortando” el gráfico de f con un plano a la altura deseada.

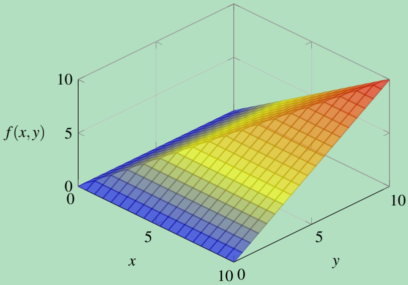
Ejemplo (Curvas de nivel para $Y = K^{0,3}L^{0,7}$)





En este ejemplo, si Y modela la producción para una empresa, las curvas de nivel se llaman **isocuantas**. Esto porque, por ejemplo, a altura 4 (línea amarilla) todos esos puntos (K, L) entregan la misma cantidad de producción.

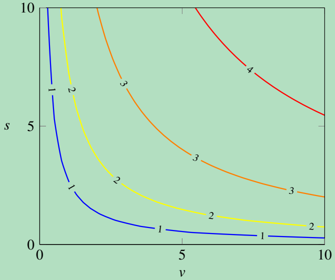
Ejercicio: Dibuje tres curvas de nivel para las siguientes funciones.

- $f(x,y) = x^2 - y$.
- 

Aplicación: Curvas de nivel y problema del consumidor

En sus 8 horas diarias libres, usted obtiene utilidad de jugar videojuegos y ver series. Su función de utilidad es $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ con $u(v,s) = \ln(v) + \ln(s)$, donde v y s son las horas jugando videojuegos y viendo series, respectivamente. Encuentre la combinación de v y s que hace que usted obtenga la máxima utilidad posible, siguiendo los siguientes pasos:

1. Observe las curvas de nivel de u y piense ¿hacia donde crece la utilidad?



Aplicación: Curvas de nivel y problema del consumidor

2. Escriba una función $g(v,s)$ que represente el total de horas utilizadas en ambas actividades.
3. Grafique (en un lugar conveniente) la función del paso anterior.
4. Concluya en qué punto (o puntos) debiera darse el máximo de utilidad.

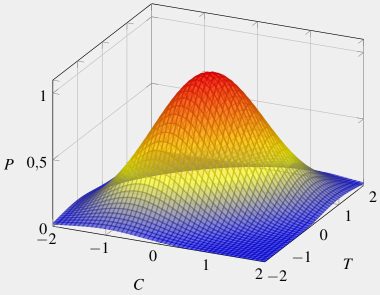
Derivadas parciales

Motivación: Precio del cobre

- Pensemos que el precio del cobre (P) se mueve según la función:

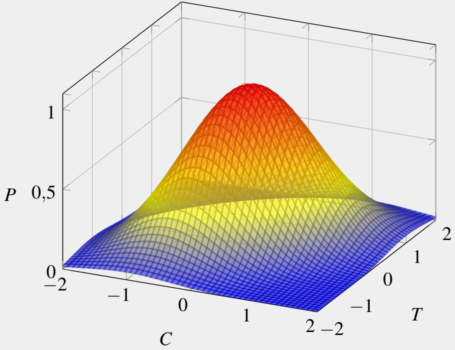
$$P = e^{-C^2 + CT - T^2}$$

  - C es el cambio porcentual del índice SSEC (el “IPSA chino”).
  - T es el cambio porcentual en las toneladas extraídas de cobre.



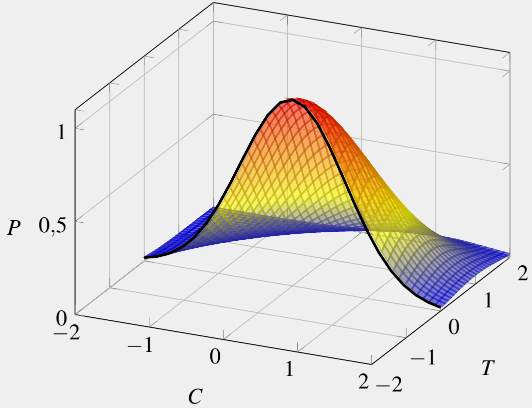
Motivación: Precio del cobre

- Los productores se preguntan, ¿extraigo una tonelada adicional?
- Pero, ¿qué pasa si China mejora su actividad económica?

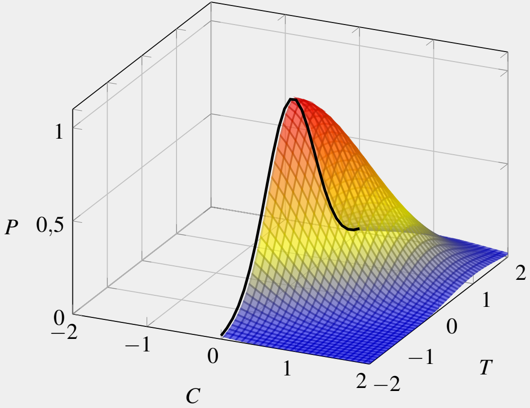


Motivación: Precio del cobre

- Hay veces donde una mayor C sube el precio otras donde lo baja



- Lo mismo ocurre con T.



Motivación: Precio del cobre

- Necesitamos sistematizar este comportamiento.
  - No siempre podemos recaer en el dibujo.
- Esto es sobre todo cierto cuando hay varias variables.
- Y más aún cuando pensando en optimización.
- **¡Necesitamos derivadas!**

- Para una función univariada f, su derivada era la "razón de cambio".
  - Responde a la pregunta ¿cuánto cambia $f(x)$ si x cambia?.
  - Si $f' = 3$, entonces $f(x)$ avanza 3 veces lo que avanza x.
  - Esto es válido cuando los cambios en x son pequeños.
- La lógica anterior hacía que escribiéramos la derivada como:

$$\frac{df}{dx}: \quad \text{“El cambio en } f \text{ cuando cambia } x\text{”}$$

- Para funciones multivariadas será muy parecido.

Derivadas de funciones multivariadas

- Pensemos en una función de 2 variables $g(x, y)$.

- Queremos ver la "razón de cambio".
  - Pero hay muchas preguntas.
  - ¿Ambas variables se mueven lo mismo?, ¿Con qué "velocidad se mueven"?, etc.

- El problema es que no sabemos mirar muchas variables a la vez.
  - No se puede hacer "razonablemente".
  - Lo mejor es que "congelamos" algunas variables.

Ejemplo (Derivada para una función de dos variables)

- Consideremos la función $f(x,y) = 3x^2y + 2xy + 3y^2$.
  - Queremos ver cómo cambia f cuando cambian x e y.
  - Pero no sabemos cómo mover ambas a la vez.
- Pensemos por un segundo que y no es una variable (está fija en un valor).
  - Entonces, ahora f es una función de una variable.
  - En ese caso

$$\frac{df}{dx} = 6xy + 2y$$

Definición (Derivadas parciales para funciones de dos variables)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con variables llamadas x_1 y x_2. Definimos:

- La derivada parcial de f con respecto a x_1 como la derivada de la función f con respecto a x_1, si x_2 se piensa como constante. Se escribe $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ó f_{x_1}.
- La derivada parcial de f con respecto a x_2 como la derivada de la función f con respecto a x_2, si x_1 se piensa como constante. Se escribe $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ó f_{x_2}.

- Como no cambiamos la definición, la interpretación es la misma.
  - Si $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3$ cuando $x_2 = 1$, entonces $f(x_1, 1)$ avanza 3 veces lo que avanza x_1.
  - Esa interpretación solo es válida cuando los cambios en x_1 son pequeños.

- No olvidar que las derivadas es algo “local”.
  - Es decir, hay un valor para la derivada en todo punto.
  - Específicamente uno escribe $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$.
  - Para indicar que la derivada se está calculando en el punto (x_1, x_2).

Ejemplo (Derivadas parciales para funciones de dos variables)

Para la función que modelaba las ventas de acuerdo al precio (p) y el gasto en publicidad (A):

$$f(p, A) = 1000(5 - pe^{-kA}),$$

¿Cuánto cambian las ventas si el precio sube?

Ejemplo (Derivadas parciales para funciones de dos variables)

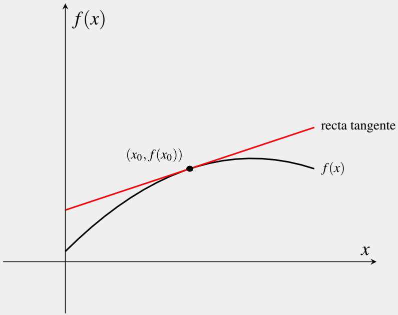
Para la función que modelaba las ventas de acuerdo al precio (p) y el gasto en publicidad (A):

$$f(p,A) = 1000(5 - pe^{-kA}),$$

¿Cuánto cambian las ventas si el gasto en publicidad sube?

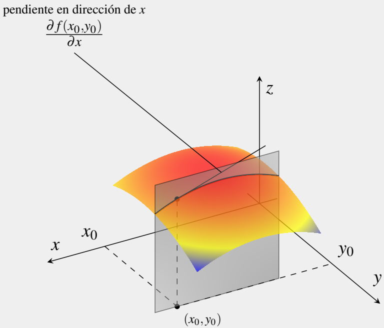
Interpretación geométrica

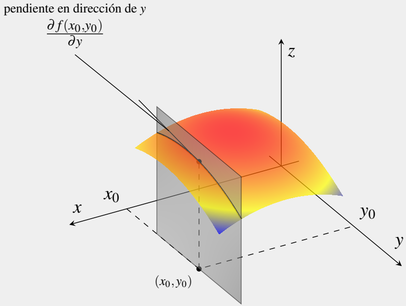
- Para una función univariada, su derivada era la pendiente de la **recta tangente**.



$$y = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \times (x - x_0)$$

- Con las derivadas parciales la idea no cambia.
  - Porque son derivadas de funciones univariadas.
  - Pero el dibujo se ve un poco distinto.



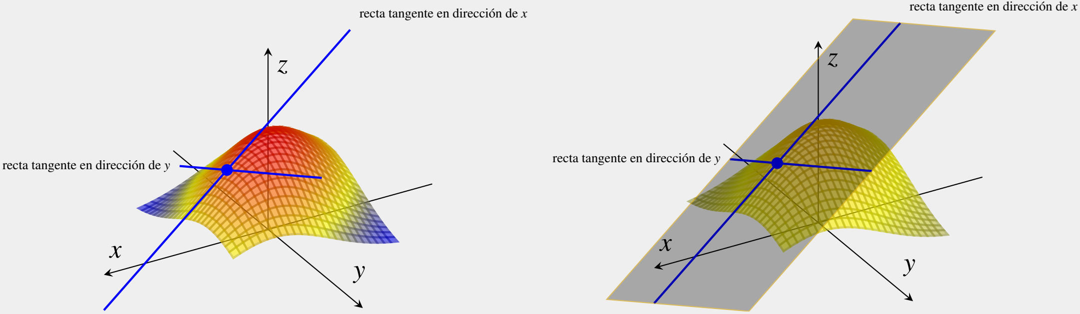


Interpretación geométrica

- Entonces en cada punto tenemos dos direcciones tangentes.
  - Una en la dirección x y otra en la dirección y.

- Esto significa que tenemos un resultado parecido al de la recta tangente.
  - Pero para dos variables ahora tenemos un **plano tangente**.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0)$$

La definición de derivada parcial se generaliza directamente al caso de n variables.

Definición (Derivadas parciales para funciones de n variables)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con variables llamadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Definimos la derivada parcial de f con respecto a x_i como la derivada de la función f con respecto a x_i, si las otras $n-1$ variables se piensan como constantes. Se escribe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ó f_{x_i}.

- La interpretación de siempre, como razón de cambio se mantiene.
  - Recordando que esa interpretación solo vale para cambios pequeños de x_i.
  - Y que solo vale en los valores donde “congelamos” las demás variables.

El gradiente

Definición (Gradiente)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con variables llamadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Llamamos gradiente de f (∇f) al vector de las derivadas parciales de f. Esto es,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

- Como las derivadas parciales son funciones, el gradiente también lo es.
- El gradiente tiene muchas propiedades interesantes.
- Y aparecerá continuamente en el curso.

Derivadas parciales de orden superior

Motivación: Precio del cobre

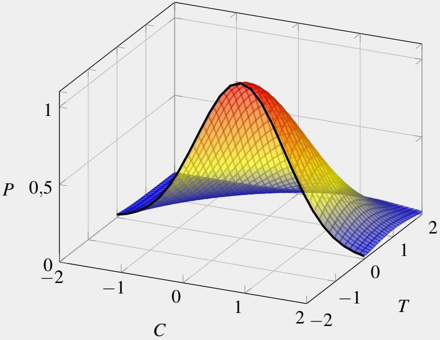
- En el modelo del precio del cobre (P):

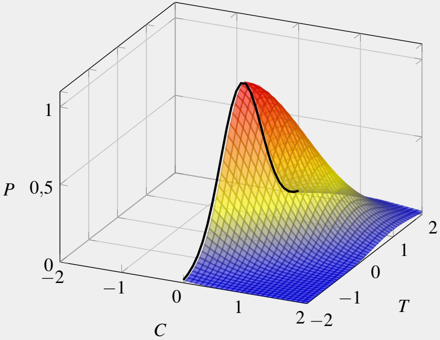
$$P = e^{-C^2+CT-T^2}$$

  - C es el cambio porcentual del índice SSEC (el "IPSA chino").
  - T es el cambio porcentual en las toneladas extraídas de cobre.

- ¿Cómo describir el movimiento de las derivadas parciales?
  - ¿El precio aumenta cada vez más a medida que T crece?
  - ¿El precio cae cada vez más a medida que C crece?

Motivación: Precio del cobre





- Al final, las derivadas son funciones.

- Y como tales, también tienen derivadas.
  - Estas se conocen como **derivadas (parciales) de orden superior**.

- Son parte importante de la descripción de una función.
  - Y también serán importantes en optimización.

Definición (Derivadas parciales de segundo orden)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con variables llamadas $x_1, \ldots, x_n$. Definimos

- La derivada parcial de segundo orden con respecto a la variable x_i como

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

  y la anotamos como $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ o bien, $f_{x_i x_i}$.

- La derivada parcial de segundo orden con respecto a las variables x_i y x_j como

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

  y la anotamos como $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, o bien, $f_{x_i x_j}$

- Observar que en la segunda parte de la definición el orden es importante.
- A priori

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

- Esto puede llegar a ser cierto bajo ciertas condiciones.

Teorema de Young

Teorema (Teoremita de Young)

Supongamos que dos derivadas parciales de orden 2 de la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ se han obtenido con el mismo número de derivaciones respecto de cada una de las variables y son continuas en un conjunto abierto S. Entonces las dos derivadas parciales son iguales en todo punto de S.

- Si se cumplieran las condiciones de este teorema, entonces se da la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

- El teorema es muy útil para calcular e interpretar derivadas parciales.

Ejemplo (Teoremita de Young)

En el modelo de ventas, $f(p,A) = 1000(5 - pe^{-kA})$, las derivadas parciales son continuas,

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -1000e^{-kA}, \qquad \frac{\partial f}{\partial A} = 1000kpe^{-kA},$$

luego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial A} = \frac{\partial^2 f}{\partial A \partial p} = 1000ke^{-kA}$$

Lo que se interpreta como “el cambio marginal en ventas por cambios en precio es creciente en el gasto en publicidad” y “el cambio marginal en ventas por cambios en gasto publicitario es creciente en el precio” y ambos efectos son iguales.

Ejercicio: Interpretación del Teorema de Young

Verifique el teorema de Young para la función de producción $Y = K^{0{,}3}L^{0{,}7}$ e interprete.

Definición (Matriz hessiana)

Para una función $f(x_1,\ldots,x_n)$ se define la matriz Hessiana H como la matriz de derivadas parciales de segundo orden (o matriz de segundas derivadas):

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

- Esta matriz será muy importante para el capítulo de optimización.
- Además, tiene una conexión muy cercana con el Teorema de Young.

Corolario (Matriz hessiana simétrica)

Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es tal que se cumplen los supuestos del teorema de Young en un conjunto abierto S, entonces H es simétrica, es decir, $H^T = H$.

- Recordar que las matrices simétricas son iguales a su traspuesta.
- Esto es útil para ahorrar cálculos de derivadas de segundo orden.

Definición (Derivadas parciales de orden superior)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con variables llamadas $x_1, \ldots, x_n$. Definimos la derivada parcial de orden m con respecto a las variables $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ es

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \left(\cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \right)$$

y la anotamos como $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$ o bien, $f_{x_{i_1} \cdots x_{i_m}}$.

- La notación es rara pero por ejemplo, para $f(x,y)$, podemos tener

$$\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y}$$

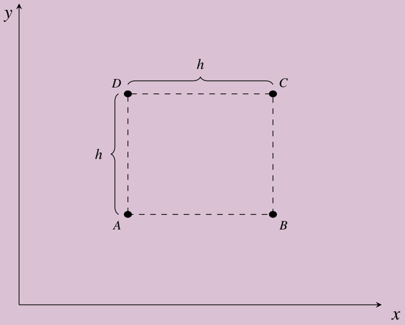
Teorema (Teorema de Young)

Supongamos que dos derivadas parciales de orden m de la función $f(x_1,\ldots,x_n)$ se han obtenido con el mismo número de derivaciones respecto de cada una de las variables y son continuas en un conjunto abierto S. Entonces las dos derivadas parciales son iguales en todo punto de S.

- Este es el enunciado general del Teorema de Young.
  - Solo cambiamos "de orden 2" por "de orden m".

"Demostración" (Teorema de Young)

Pensemos en una función $f(x,y)$ y consideremos los siguientes puntos del dominio:



"Demostración" (Teorema de Young)

Si h es pequeño, entonces

$$f_{xy}(A) \approx \frac{1}{h}(f_x(D) - f_x(A)) \approx \frac{1}{h^2}(f(C) - f(D) - (f(B) - f(A)))$$

$$f_{yx}(A) \approx \frac{1}{h}(f_y(B) - f_y(A)) \approx \frac{1}{h^2}(f(C) - f(B) - (f(D) - f(A)))$$

y, por lo tanto,

$$f_{xy}(A) \approx f_{yx}(A)$$

El mismo argumento vale para los demás puntos.